Ciągi

TEORIA

Ciąg to liczby ustawione w kolejności. **n to numer wyrazu**, a **a_n to jego wartość**. Tutaj zaczynamy od n = 1. W odróżnieniu od funkcji na całej osi wybieramy tylko numery 1, 2, 3, …

Zwykły ciąg - podstaw numer

$$a_n = \frac{3 \cdot n - 2}{n + 1}$$

Czwarty wyraz: $a_4 = \frac{3 \cdot 4 - 2}{4 + 1} = \frac{10}{5} = 2$. Nie potrzeba specjalnego wzoru - po prostu wstaw 4 zamiast n.

Arytmetyczny - dodajesz r

2, 5, 8, 11, 14, …

Stała różnica: r = 3. Jeśli r > 0, ciąg rośnie; jeśli r < 0, maleje; przy r = 0 jest stały.

Geometryczny - mnożysz przez q

2, 6, 18, 54, …

Stały iloraz: q = 3. Zawsze mnożysz poprzedni wyraz przez tę samą liczbę.

Arytmetyczny - trzy wzory

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

Na przykład $a_7 = a_1 + 6r$. Od pierwszego do siódmego wyrazu wykonujesz 6 kroków.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Suma = średnia pierwszego i ostatniego wyrazu × liczba wyrazów. Dla 2, 5, 8, 11, 14: $S_5 = 8 \cdot 5 = 40$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Środkowy wyraz jest średnią sąsiadów (n ≥ 2). Przykład (2x − 5, x + 3, 2x + 1): 2(x + 3) = 4x − 4, więc x = 5.

Geometryczny - trzy wzory

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Na przykład $a_7 = a_1 \cdot q^6$.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Wzór na sumę działa dla $q \neq 1$. Przy $q = 1$ wszystkie wyrazy są takie same: $S_n = n \cdot a_1$. Dla 2, 6, 18, 54 suma $S_4 = 80$.

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Kwadrat środkowego wyrazu to iloczyn sąsiadów ($n \geq 2$). Przy sprawdzaniu trzech liczb zwróć uwagę na zera: sam ten warunek nie zawsze wystarcza. Najpewniej sprawdzić, czy istnieje wspólny mnożnik q.

Zobacz na przykładzie

Na stronie możesz zmieniać wartości i obserwować wynik. Dla ciągu arytmetycznego: 2, 5, 8, 11, 14. Dla geometrycznego: 2, 6, 18, 54, 162.

Gdy wyraz zależy od poprzedniego

Rekurencja mówi, jak obliczyć następny wyraz. Przy $a_1 = 2$ i $a_{n+1} = 2a_n + 1$: $a_2 = 5$, $a_3 = 11$. Licz po kolei.

Nie każdy ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Najpierw sprawdź różnice albo ilorazy kolejnych wyrazów (ilorazy tylko przy niezerowym mianowniku).

Symetryczne iloczyny: w ciągu geometrycznym $a_2 \cdot a_7 = a_3 \cdot a_6$, bo obie pary indeksów mają tę samą sumę.

Przykładowe zadania

1. Wyraz ciągu arytmetycznego

Dany jest ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 5$ i $a_8 = -10$. Oblicz a_{22}.

1. Rozpisz ósmy wyraz

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_8 = a_1 + 7r$

$-10 = a_1 + 7r$

2. Wstaw $a_1 = 5$ i oblicz różnicę

$-10 = 5 + 7r$

$-15 = 7r$

$r = -\frac{15}{7}$

3. Oblicz dwudziesty drugi wyraz

$a_{22} = a_1 + 21r$

$a_{22} = 5 + 21 \cdot \left(-\frac{15}{7}\right) = 5 - 45 = -40$

4. Odpowiedź

$a_{22} = -40$

Od pierwszego do dwudziestego drugiego wyrazu wykonujesz 21 kroków o różnicę r.

Przykładowe zadania

2. Trzy wyrazy ciągu arytmetycznego

Trzywyrazowy ciąg $(2m + 11; m^2 + 3; 5 - m)$ jest arytmetyczny i malejący. Wyznacz m.

1. Środkowy wyraz jest średnią sąsiadów

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$m^2 + 3 = \frac{2m + 11 + 5 - m}{2}$$

2. Pomnóż obie strony przez 2 i uporządkuj

$$2m^2 + 6 = 2m + 11 + 5 - m$$

$$2m^2 - m - 10 = 0$$

3. Rozwiąż równanie kwadratowe

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 81$$

$$m_1 = \frac{1 - 9}{4} = -2$$

$$m_2 = \frac{1 + 9}{4} = \frac{5}{2}$$

4. Sprawdź warunek: ciąg ma być malejący

$m = -2 \rightarrow (7; 7; 7)$

$$m = \frac{5}{2} \rightarrow (16; \frac{37}{4}; \frac{5}{2})$$

Pierwszy ciąg jest stały, więc odpada. Drugi jest malejący: $16 > \frac{37}{4} > \frac{5}{2}$.

5. Odpowiedź

$$m = \frac{5}{2}$$

Samo rozwiązanie równania nie wystarcza - sprawdź jeszcze warunek z treści.

Przykładowe zadania

3. Trzy wyrazy ciągu geometrycznego

Trzywyrazowy ciąg (m − 3; m; 2m) jest geometryczny i rosnący. Wyznacz m.

1. Kwadrat środkowego wyrazu to iloczyn sąsiadów

$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$
$m^2 = (m - 3) \cdot 2m$

2. Wymnóż i przenieś wszystko na jedną stronę

$m^2 = 2m^2 - 6m$
$-m^2 + 6m = 0$

3. Wyciągnij m przed nawias

$m(-m + 6) = 0$
$m = 0$ lub $m = 6$

Iloczyn jest równy zero, gdy przynajmniej jeden czynnik jest zerem.

4. Sprawdź, czy ciąg jest rosnący

$m = 0 \rightarrow (-3; 0; 0)$
$m = 6 \rightarrow (3; 6; 12)$

Pierwszy nie jest rosnący, bo dwa ostatnie wyrazy są równe. Drugi jest rosnący i geometryczny z ilorazem $q = 2$.

5. Odpowiedź

$m = 6$