Geometria analityczna

TEORIA

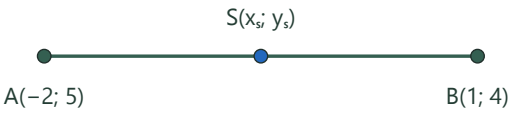
Tu geometria spotyka liczby. Najpierw odczytaj współrzędne punktów. Potem wybierz jeden z trzech obiektów: **odcinek, prostą albo okrąg**.

1. Środek odcinka - średnia współrzędnych

$$x_s = \frac{x_a + x_b}{2}$$

$$y_s = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Przykład 1. Znasz oba końce

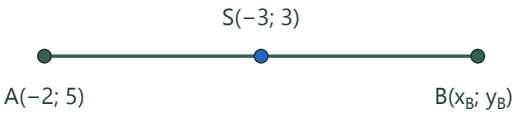


$$x_s = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_s = \frac{5+4}{2} = \frac{9}{2}$$

$$S = \left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{9}{2}\right)$$

Przykład 2. Znasz koniec i środek



$$-3 = \frac{-2+x_B}{2}$$

$$-6 = -2 + x_B$$

$$x_B = -4$$

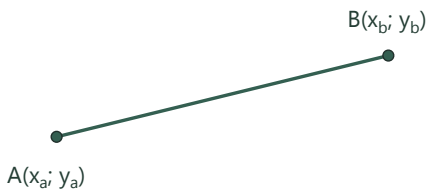
$$3 = \frac{5+y_B}{2}$$

$$6 = 5 + y_B$$

$$y_B = 1$$

$$B = (-4; 1)$$

2. Długość odcinka - Pitagoras



$$|AB| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$A = (x_a; y_a)$, $B = (x_b; y_b)$.

Przykład. A = (−2; 5), B = (1; 4)

$|AB| = \sqrt{(-2-1)^2+(5-4)^2}$

$|AB| = \sqrt{(9+1)} = \sqrt{10}$

3. Okrąg - środek i promień

$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$

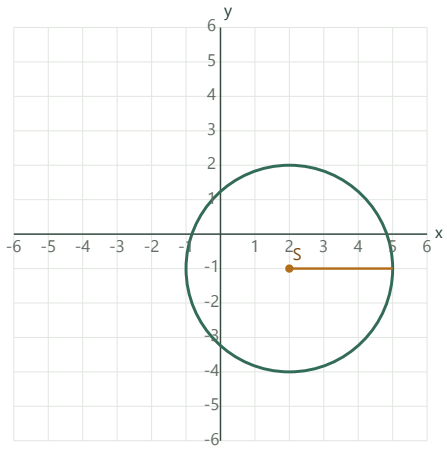
Środek to $S = (x_s; y_s)$, a r to promień.

Przykład. S = (3; −5), r = 7

$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$

Uwaga na znaki w nawiasach i kwadrat promienia.

Okrąg na przykładzie



Środek S = (2; −1), promień r = 3. Równanie: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$. Na stronie możesz przesuwać środek i zmieniać promień.

Równoległa - zachowaj a

$a_1 = a_2$

$y = 3x - 7$
$y = 3x + 5$

Obie proste mają a = 3, więc są równoległe. Różnią się wyrazem b.

Prostopadła - odwróć a i zmień znak

$a_1 \cdot a_2 = -1$

$y = 3x - 7$

$y = -\frac{1}{3}x + 5$

Iloczyn współczynników wynosi $3 \cdot (-1/3) = -1$, więc proste są prostopadłe.

Dobra rada: środek to połowa drogi

Gdy znasz końce średnicy, policz środek odcinka, a potem odległość środka od jednego końca. W trójkącie prostokątnym środek okręgu opisanego leży w połowie przeciwprostokątnej.

Odbicie względem osi Oy: $(x; y) \to (-x; y)$. Względem Ox: $(x; y) \to (x; -y)$. Promień okręgu przy odbiciu się nie zmienia.

Przykładowe zadania

Prosta przechodząca przez dwa punkty

Znajdź równanie prostej przechodzącej przez A = (1; 2) i B = (3; −4).

1. Wstaw współrzędne punktów za x i y

$y = ax + b$

$$\begin{cases} 2 = 1a + b \\ -4 = 3a + b \end{cases}$$

2. Pomnóż pierwsze równanie przez −1

$$\begin{cases} -2 = -1a - b \\ -4 = 3a + b \end{cases}$$

3. Dodaj równania i oblicz a

$-6 = 2a \quad / : 2$

$a = -3$

4. Wstaw a do jednego równania i oblicz b

$2 = -3 + b$

$b = 5$

5. Zapisz odpowiedź

$y = -3x + 5$

Sprawdzenie: dla x = 1 dostajesz y = 2, a dla x = 3 dostajesz y = −4.

Przykładowe zadania

Punkt przecięcia dwóch prostych

Znajdź punkt przecięcia prostych $y = 2x - 5$ i $y = -3x + 10$.

1. Zapisz układ i podstaw jeden wzór za y

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x + 10 \end{cases}$$

W punkcie przecięcia obie wartości y są równe.

$$2x - 5 = -3x + 10$$

2. Rozwiąż równanie liniowe

$$2x + 3x = 10 + 5$$
$$5x = 15 \quad / : 5$$
$$x = 3$$

3. Wstaw x do dowolnej prostej

$$y = 2 \cdot 3 - 5 = 6 - 5 = 1$$

4. Zapisz punkt przecięcia

$$A = (3; 1)$$

Sprawdzenie w drugiej prostej: $-3 \cdot 3 + 10 = 1$.