Funkcja kwadratowa

TEORIA I PRZYKŁADY

Wykres funkcji kwadratowej to **parabola**. Współczynnik $a \neq 0$ decyduje o ramionach: $a > 0$ - w górę, $a < 0$ - w dół.

Ogólna - do obliczeń

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Stąd odczytasz a, b, c. Oblicz deltę $\Delta = b^2 - 4ac$, gdy szukasz miejsc zerowych.

Iloczynowa - widać zera

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Przykład: $-3(x - 1)(x + 3)$ ma miejsca zerowe 1 i −3. Ta postać istnieje w liczbach rzeczywistych, gdy $\Delta \geq 0$; przy $\Delta = 0$ oba zera są równe.

Kanoniczna - widać wierzchołek

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$
$$W = (p; q)$$

Przykład: $2(x - 2)^2 - 4$ ma wierzchołek (2; −4). Uwaga na znak w nawiasie: $x + 3$ oznacza $p = -3$.

Dobra rada: szukaj wierzchołka i rysuj

Wierzchołek pokazuje najmniejszą lub największą wartość oraz miejsce, w którym funkcja zmienia kierunek.

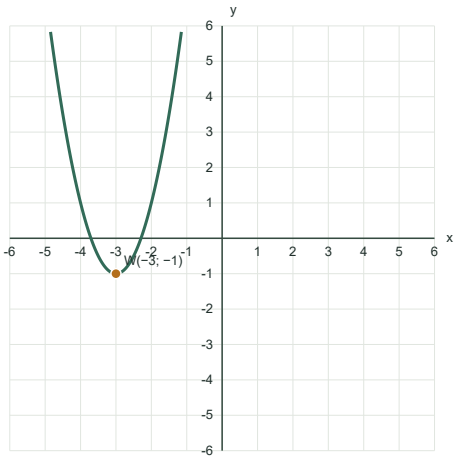
$$p = -\frac{b}{2a} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Możesz też policzyć $q = f(p)$. Oś symetrii ma równanie $x = p$.

Funkcja kwadratowa

ZOBACZ NA PRZYKŁADZIE

$f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$



Wierzchołek W = (−3; −1), oś symetrii x = −3. Dziedzina: ℝ. Zbiór wartości: [−1; +∞). Funkcja maleje na (−∞; −3] i rośnie na [−3; +∞). Najmniejsza wartość wynosi −1. Na stronie możesz zmieniać a, p i q.

Miejsca zerowe - przyrównaj f(x) do 0

Δ > 0: dwa miejsca zerowe.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Δ = 0: jedno miejsce zerowe $x_0 = p$. Δ < 0: brak rzeczywistych miejsc zerowych.

Symetria i znaki - czytaj szkic

Równe wartości: argumenty jednakowo odległe od p dają ten sam wynik. Dla p = −3 argumenty −9 i 3 mają tę samą wartość.

Dwa miejsca zerowe: $p = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Znając jedno zero i p, drugie znajdziesz przez odbicie względem osi x = p.

f(x) ≥ 0: szukaj wykresu na osi X lub nad nią. Dla ramion w dół i zer −2, 4 otrzymasz [−2; 4].

Przesunięcie: f(x − 5) to 5 w prawo, f(x) + 5 to 5 w górę.

Funkcja kwadratowa

PRZYKŁADOWE ZADANIA • ROZWIĄZANIA KROK PO KROKU

1. Wzór funkcji z wierzchołka i punktu

Wierzchołek paraboli to W(−3; 2). Do wykresu należy punkt A(1; 4). Wyznacz wzór funkcji.

1. Wybierz postać kanoniczną

$f(x) = a(x - p)^2 + q$

Wierzchołek to (p; q), więc p = −3, q = 2. Otrzymujemy $f(x) = a(x + 3)^2 + 2$.

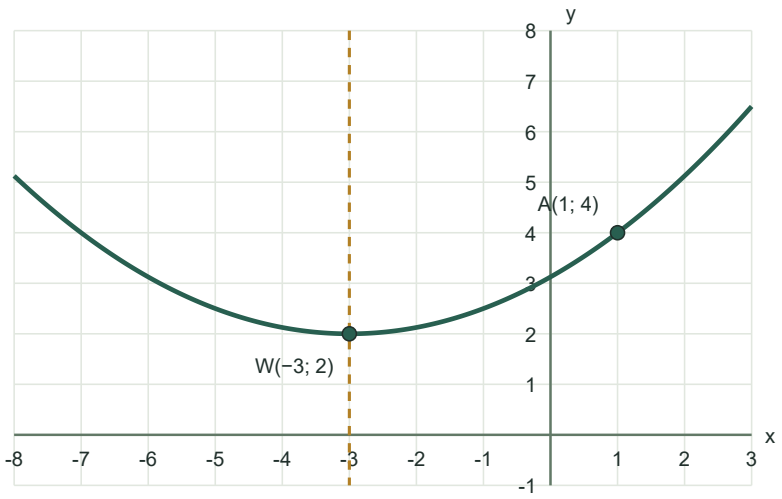
2. Wykorzystaj punkt A

$4 = a(1 + 3)^2 + 2 \rightarrow 4 = 16a + 2$

$2 = 16a \rightarrow a = \frac{1}{8}$

3. Zapisz wynik

$f(x) = \frac{1}{8}(x + 3)^2 + 2$



Ramiona są skierowane w górę. Podstawienie x = 1 daje f(1) = 4.

Funkcja kwadratowa

PRZYKŁADOWE ZADANIA • ROZWIĄZANIA KROK PO KROKU

2. Dwa argumenty, ta sama wartość

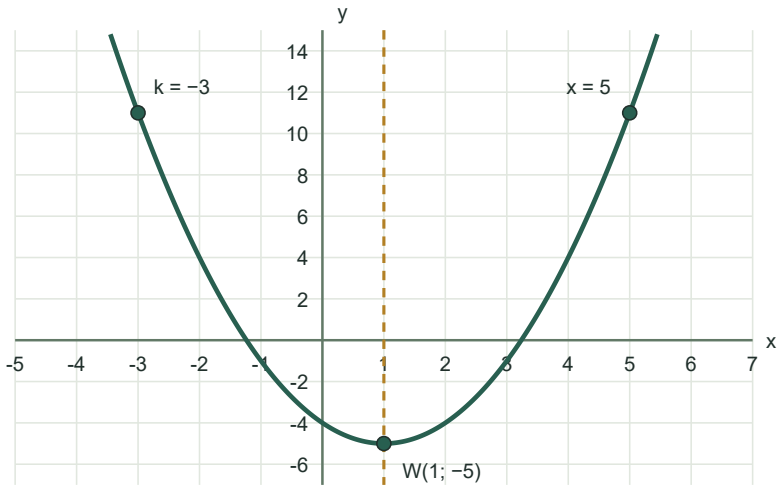
Wierzchołek paraboli to W(1; −5). Wyznacz k, dla którego f(5) = f(k).

1. Wyznacz oś symetrii

Przez wierzchołek przechodzi pionowa oś symetrii x = 1. Punkty paraboli po obu stronach tej osi, w tej samej odległości, mają tę samą wysokość.

2. Odmierz taką samą odległość

$5 - 1 = 4 \rightarrow k = 1 - 4 = -3$



To rysunek przykładowej paraboli o podanym wierzchołku. Rozumowanie działa dla każdej takiej paraboli.

3. Uwzględnij wszystkie argumenty

k = −3 lub k = 5. Równość f(5) = f(5) też jest prawdziwa. Jeśli szukamy **innego argumentu niż 5**, odpowiedzią jest wyłącznie **k = −3**.

Funkcja kwadratowa

PRZYKŁADOWE ZADANIA • ROZWIĄZANIA KROK PO KROKU

3. Wyznacz współczynniki b i c

Funkcja $f(x) = x^2 + bx + c$ ma wierzchołek $W(3; -2)$. Oblicz b i c.

1. Zapisz postać kanoniczną

Współczynnik $a = 1$. Wierzchołek daje $p = 3$ i $q = -2$.

$$f(x) = (x - 3)^2 - 2$$

2. Rozwiń kwadrat

$$(x - 3)^2 - 2 = x^2 - 6x + 9 - 2 = x^2 - 6x + 7$$

Pamiętaj o środkowym wyrazie: $(x - 3)^2$ to $x^2 - 6x + 9$.

3. Porównaj współczynniki

$$b = -6,\ c = 7$$

Współczynnik przy x to −6, a wyraz wolny to 7.

Funkcja kwadratowa

PRZYKŁADOWE ZADANIA • ROZWIĄZANIA KROK PO KROKU

4. Zbiór wartości i przedział wzrostu

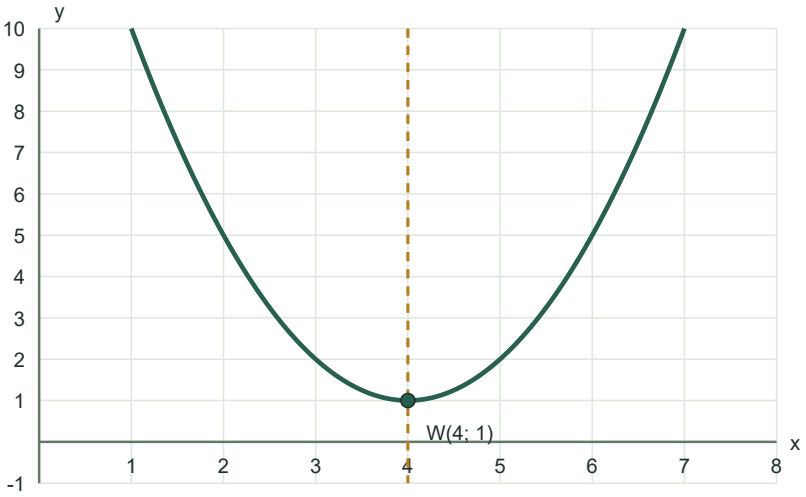
Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 - 8x + 17$ oraz przedział, w którym funkcja rośnie.

1. Znajdź wierzchołek

$$x^2 - 8x + 17 = (x - 4)^2 + 1$$

Z postaci kanonicznej odczytujemy W(4; 1). Mamy $a = 1 > 0$, więc ramiona są skierowane w górę.

2. Odczytaj zbiór wartości



Najniższa wysokość paraboli to 1. Funkcja osiąga każdą wartość większą lub równą 1.

Zbiór wartości: $[1; +\infty)$

3. Odczytaj przedział wzrostu

Na prawo od wierzchołka wykres idzie w górę. Funkcja rośnie w przedziale **$[4; +\infty)$**, a maleje w $(-\infty; 4]$.

Nie pomyl współrzędnych: q = 1 wyznacza zbiór wartości, p = 4 wyznacza granicę przedziałów monotoniczności.